Definicija 1.9. Za funkciju $f : X \to \bar{\mathbf{R}}$ definišemo njen *pozitivan i negativan deo* sa

$$f_+(x) = \sup\{f(x), 0\} = \max\{f(x), 0\}, \quad x \in X,$$
$$f_-(x) = -\inf\{f(x), 0\} = -\min\{f(x), 0\} = \sup\{-f(x), 0\}, \quad x \in X.$$

▲

Propozicija 1.8.
Ako su f i g merljive na $\sigma-$ algebri $(X, \mathcal{M})$, tada su merljive i sledeće funkcije: $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$, f_+, f_-.

Dokaz: Važi

$$\sup_{i \in \mathbf{N}} f_i = \max\{f, g\}$$

gde je $f_1 = f$, $f_2 = g$, $f_3 = f_4 = f_5 = ... = -\infty$. Primenjujemo prethodno tvrđenje i sledi da je funkcija $\max\{f, g\}$ merljiva. Slično se pokazuje za $\min\{f, g\}$, pa na osnovu toga i za f_+ i f_-. ■

1.5 Nenegativna merljiva funkcija kao granica niza nenegativnih jednostavnih funkcija

Definicija 1.10. Funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$ je *jednostavna*, ako je kodomen konačan skup, odnosno ako postoje $a_1, ..., a_r \in [-\infty, \infty]$ tako da za svako $x \in X$ važi $f(x) \in \{a_1, ..., a_r\}$.

▲

Stavimo $A_i = \{x \in X;\ f(x) = a_i\}$, $i = 1, ..., r$. Važi $\bigcup_{i=1}^{r} A_i = X$ i skupovi A_i, $i = 1, ..., r$, čine particiju skupa X.

Ako $a_1, ..., a_r \in \mathbf{R}$, tada je $f(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i \kappa_{A_i}(x)$, $x \in X$, gde je κ_{A_i} karakteristična funkcija skupa A_i.

Propozicija 1.9. Neka je $(X, \mathcal{M})$ prostor sa $\sigma-$ algebrom i neka su $a_1, ..., a_r$ realni brojevi. Jednostavna funkcija $f(x) = \sum_{i=1}^{r} a_i \kappa_{A_i}(x)$, $x \in X$ je merljiva ako i samo ako su A_i, $i = 1, ..., r$ merljivi.

Dokaz: Kako je $\{a_1, ..., a_r\}$ diskretan skup, za svako a_i postoji otvoren interval I_i tako da važi $I_i \ni a_i$ i $I_i \cap I_j = \emptyset$ za $i \neq j$.

Neka je f merljiva. Iz $f^{-1}(I_i) = A_i$ sledi da su A_i merljivi, $i = 1, ..., r$.

Ako su A_i merljivi, tada su κ_{A_i} merljive funkcije (Propozicija 1.4) i f je merljiva kao konačan zbir merljivih funkcija. ■